Boolean Algebra에 대한 연구

문덕진 / 교감 · 수학

지난 수십 년을 지내오는 동안 Computer는 산업 공업 및 과학 등 여러 분야에 걸쳐 필수적인 도구가 되어왔다.

이런 Computer의 기능, 역할, 기본 원리 등을 학생들에게 이해할 기회를 준다는 것은 매우 중요한 일이다.

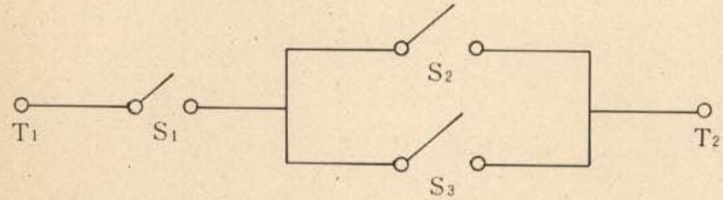
이것을 위하여 먼저 Boole 대수를 통해서 논리의 곱(: AND), 논리의 합(V : OR) 그리고, 부정(− : NOT) 을 이해하고 이것들과 집합에서의 ∩ ∪과 부합시켜 보아야 한다.

또한 스윗치 회로로서 AND회로 OR회로 NOT회로로 발전시키면 이들 연산이 논리연산 "∧" (AND)에는 "·"을 또 논리연산 "V"(OR)에는 "+"를 대응시키면 이것들은 집합으로 이루어진 몇개의 공리를 만족시키는 것임을 알 수 있다.

여기서는 지면 관계상 수학Ⅰ에서 다루는 논리의 곱, 합, 부정을 스윗치 회로망으로 설명하기로 한다.

(1) 스윗치 회로망

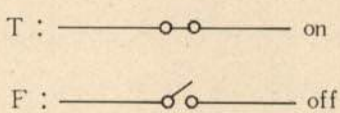
스윗치 회로라는 것은 그림과 같이 두개의 터미널(Terminal) T_1과 T_2를 연결하는 도중에 몇 개의 스윗치 S_1, S_2, S_3등을 가지는 배선을 의미한다.



여기서 스윗치가 닫힌 상태를 1, 열린상태를 0이라 한다.

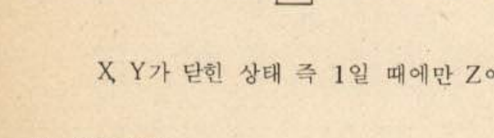
스윗치 P와 명제P

P	스윗치 (P)	전 류
T	on	흐른다
F	off	안흐른다



1) AND 회로

그림에서 보는 것과 같이 직렬회로에 있어서 두개의 스윗치가 모두 연결되어야 전류i가 흐르는 것으로써 집합에서의 교집합(Intersection Set)에 해당된다. 이것의 진리표를 보면 스윗치 함수 $f(X, Y) = X, Y$가 된다.



X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

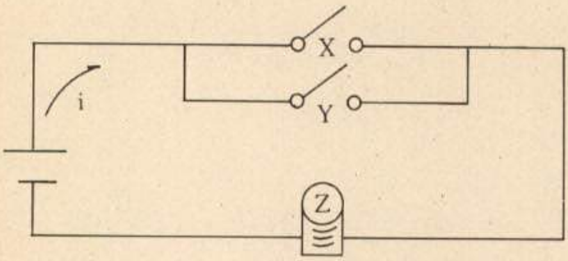
X, Y가 닫힌 상태 즉 1일 때에만 Z에 불이 켜진다.

2) OR 회로

그림에서 보는 것과 같이 병렬회로에 있어서 두 개의 스윗치 중 어느 한개만 연

결되면 전류i가 흐르는 것으로서 집합에서의 합집합(Union Set)에 해당된다.

이것의 진리표를 보면 스윗치 함수 $f(X, Y)=X+Y$가 된다.



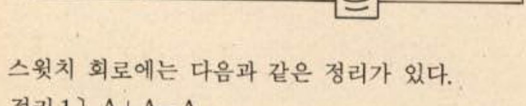
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X, Y중 어느 한개라도 닫힌 상태 즉 1일때만 Z에 불이 켜진다.

3) NOT회로

그림에서 보는 것과 같이 스윗치 X가 닫힐때는 Z에 불이 안들어 오고 스윗치 X가 열릴때는 전류i는 R를 통해 Z에 불이 켜진다.

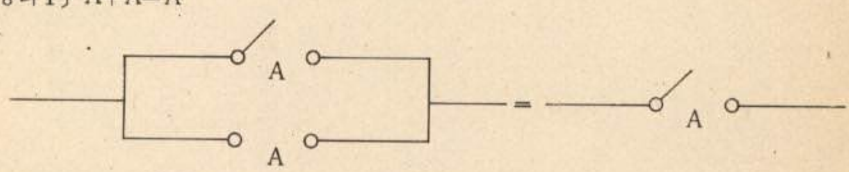
이것의 진리표를 보면 스윗치 함수 $f(X)=\overline{X}$가 된다.



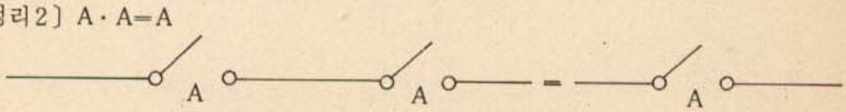
X	Z
0	1
1	0

스윗치 회로에는 다음과 같은 정리가 있다.

정리1] A+A=A



정리2] A·A=A



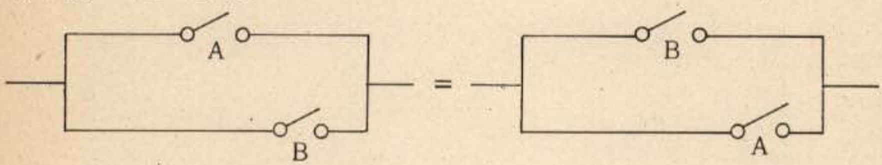
정리3] $A+\overline{A}=1$

만일 A가 동작하지 않으면 전류는 아래쪽으로 흐르고 A가 동작하면 전류는 윗쪽으로 흐르게 된다.

즉 항상 1의 상태가 된다.

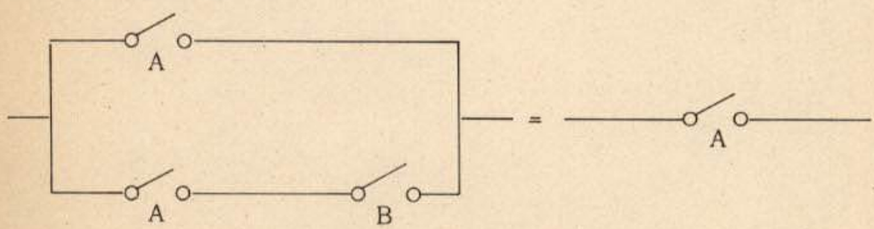
정리4] $A \cdot \overline{A}=0$

정리5] $A+B=B+A$

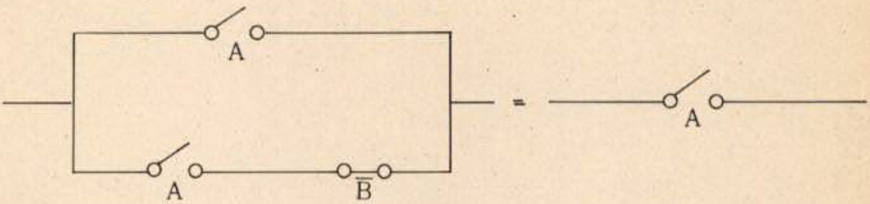


정리6] $A \cdot B=B \cdot A$

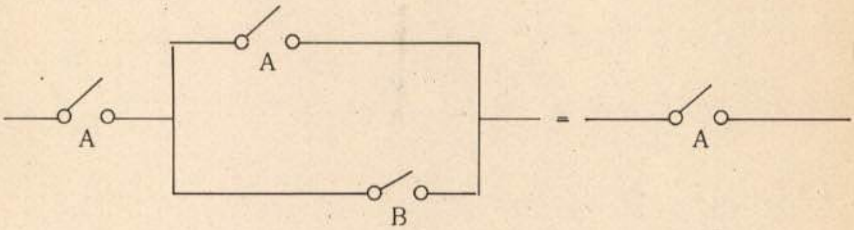
정리7] $A+A \cdot B=A$



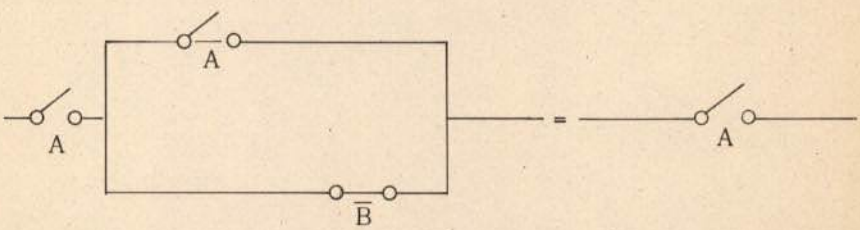
정리 7 a) $A+A\cdot\overline{B}=A$



정리 8) $A\cdot(A+B)=A$

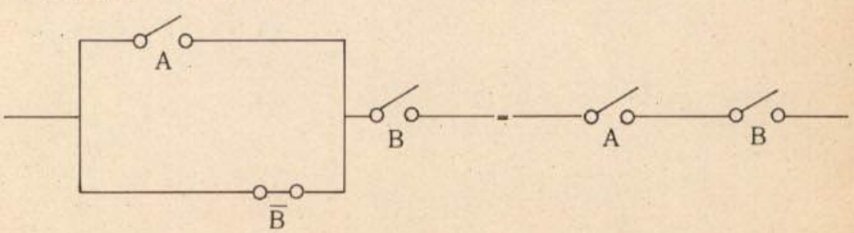


정리 8 a) $A\cdot(A+\overline{B})=A$

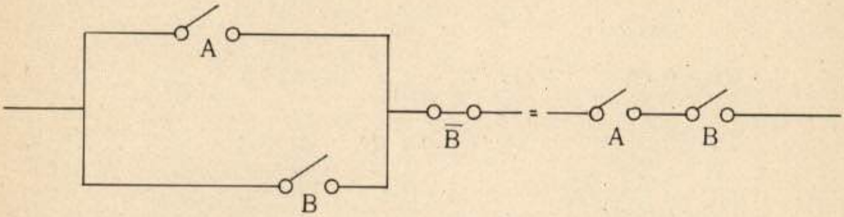


정리 7), 정리 8) 에서 스윗치 B는 아무런 효과를 나타내지 못하고 스윗 치 A만 있는 결과를 나타낸다.

정리 9) $(A+\overline{B})\cdot B=A\cdot B$

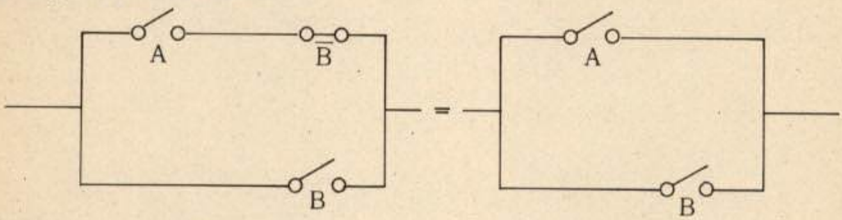


정리9 a] $(A+B)\cdot\overline{B}=A\cdot B$

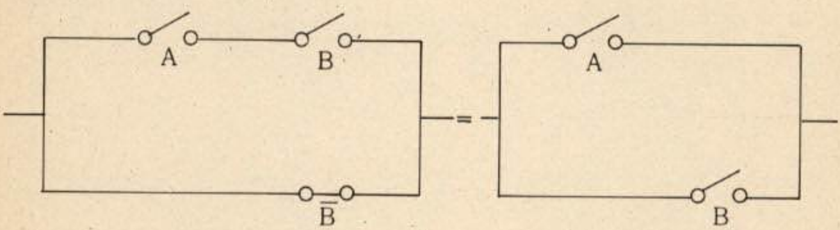


스윗치 A와 병렬로 있는 스윗치 B는 아무런 효과를 나타내지 못한다.

정리10] $A\cdot\overline{B}+B=A+B$



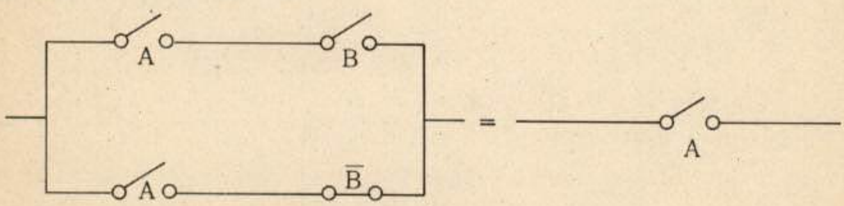
정리10a] $A\cdot B+\overline{B}=A+B$



스윗치 A는 단독으로 전류가 흐르는 통로가 되고 스윗치 B는 둘중 어느 한쪽으로 전류가 흐르게 된다.

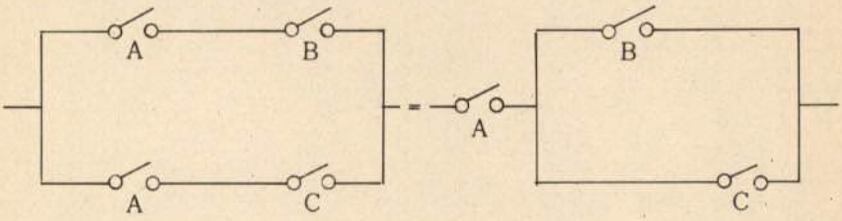
따라서 스윗치 B는 중요한 역할을 하지 못한다.

정리11] $A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$



스윗치 B에 관계없이 스윗치 A에 따라서 전류가 흐르게 된다.

정리12) A · B + A · C = A (B + C)



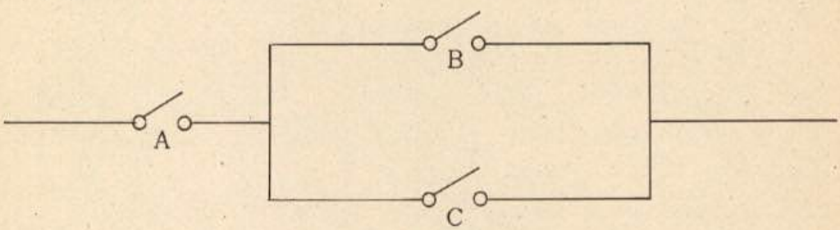
상하의 공동으로 있는 스윗치 A가 동작될 때 두 회로는 같게 된다. 정리12에 의해서 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.

즉 A·B·C = A(B·C) = (A·B) C = (A·C) B

A+B+C = A+ (B+C) = (A+B) + C = (C+A) + B

(1 - 1) A · (B+C) + A · B

= A · (B + C) + A · B = A · (B+C+B) = A · (B+C) 를 스윗치 회로로 나타내면



예1 - 2) A, B, C 세 사람의 위원으로 구성된 위원회에서 무기명 다수결 투표를 기록하는데 전기회로를 사용하고저 한다.

각 위원은 찬성일때는 각자의 버튼을 누르고 반대일때는 누르지 않는다. 만일 위원의 대다수가 찬성이면 신호등에 불이 켜지는 회로를 만들어 보면,

a는 명제 "위원A는 찬성에 투표한다"

b는 명제 "위원B는 찬성에 투표한다"

c는 명제 "위원C는 찬성에 투표한다"라 하자.

또 명제가 참일때 1, 위일때 0 라 하고 두 사람 이상 찬성하는 경우에

바라는 진리값을 1, 참이 아닌 경우에 바라는 진리값을 0 이라 하자.

이때 "위원의 대다수는 찬성에 투표한다" 의 진리표는 다음과 같다.

a	b	c	투표에 대응하는 식	바라는 진리값
1	1	1	$a \times b \times c$	1
1	1	0	$a \times b \times \bar{c}$	1
1	0	1	$a \times \bar{b} \times c$	1
1	0	0	$a \times \bar{b} \times \bar{c}$	0
0	1	1	$\bar{a} \times b \times c$	1
0	1	0	$\bar{a} \times b \times \bar{c}$	0
0	0	1	$\bar{a} \times \bar{b} \times c$	0
0	0	0	$\bar{a} \times \bar{b} \times c$	0

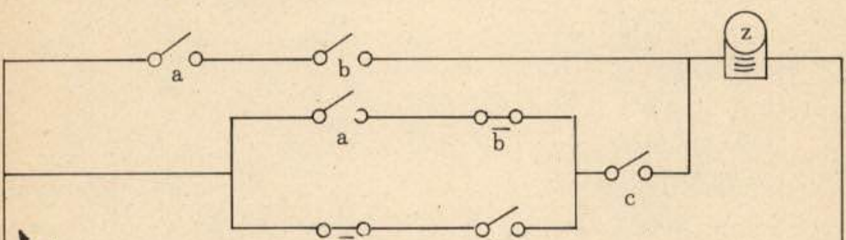
위의 진리표에서 바라는 진리값이 1인 합성명제를 S라면

$S = a \times b \times c + a \times b \times \bar{c} + a \times \bar{b} \times c + \bar{a} \times b \times c$

$= a \times b \times (c + \bar{c}) + (a \times \bar{b} + \bar{a} \times b) \times c$

$= a \times b + (a \times \bar{b} + \bar{a} \times b) \times c$

이것의 스윗치회로는 다음과 같다.



(2) 부울변수의 간략화

진리표나 그 밖의 방법으로 부울변수가 구성되면 그것을 그대로 논리회로에 적용하여 회로 설계를 할 수도 있겠으나 되도록이면 동일한 결과를 나타내는 간략한 형으로 고쳐서 사용함으로서 간단하고 경제적인 기계를 만들 수 있다.

만일 어떤 논리회로가 부울 함수 $f = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B$ 와 같은 경

우라면

$$f = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B$$
$$= A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C (A + \overline{A}) + \overline{A} \cdot B (C + \overline{C})$$
$$= A \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$
$$= A \cdot \overline{B} (1 + C) + B \cdot \overline{C} (1 + \overline{A}) + \overline{A} \cdot C (\overline{B} + B)$$
$$= A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C$$

와 같이 간략화 할 수 있다.

또

$$f = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$$
$$= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} (C + \overline{C}) + A \cdot B \cdot \overline{D} (\overline{C} + C)$$
$$= (\overline{A} \cdot B \cdot \overline{D}) + (A \cdot B \cdot \overline{D})$$
$$= B \cdot \overline{D} (\overline{A} + A)$$
$$= B \cdot \overline{D}$$

와 같이 극히 간단한 형으로 된다.

간략화 방법에 대해서 다음의 관계식을 미리 기억해 두면 매우 편리하다.

① $(A + B)(A + C) = A + B \cdot C$

② $A \cdot B + A \cdot C = A (B + C)$

③ $A + \overline{A} = 1$

④ $A \cdot \overline{A} = 1$

⑤ $A + A = A$

⑥ $A \cdot A = A$

⑦ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

⑧ $A \cdot (A + B) = A$

⑨ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

⑩ $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

⑪ $A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C = (A + B) \cdot (\overline{A} \cdot C) = A \cdot C + A \cdot B$

예 2-1) $X + X \cdot Y = X (1 + Y) = X \cdot 1 = X$

$X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$

와 같이 간략화 할 수 있는데 이를 진리표를 써서 증명하면

X	Y	X · Y	X + X · Y
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

따라서 $X + X \cdot Y = X$ 이다.

X	X	Y	X · Y	X + X · Y	X + Y
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1

따라서 $X + X \cdot Y = X + Y$ 이다.

예2 - 2) $f = A \cdot \overline{B} + C + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot \overline{C} \cdot D$

$= A \cdot \overline{B} + C + \overline{A} \cdot D + B \cdot D$ ⑨ 에 의함

$= A \cdot \overline{B} + C + D(\overline{A} + B)$ ② 에 의함

$= A \cdot \overline{B} + C + D \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$

$= A \cdot \overline{B} + C + D$ ⑨ 에 의함

예2 - 3) $f = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot C$

$= A \cdot (B \cdot C + \overline{C}) + \overline{A}\,(C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}) + A \cdot B \cdot \overline{D}$ ② 에 의함

$= A \cdot (B + \overline{C}) + \overline{A} \cdot (C + \overline{B} \cdot \overline{D}) + A \cdot B \cdot \overline{D}$ ⑨ 에 의함

$= A \cdot B + A \cdot C + \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{D}$

예2 - 4) $f = a \cdot (b \cdot c + d \cdot e) + b + \overline{a} \cdot \overline{d} \cdot \overline{e}$

$= a \cdot b \cdot c + a \cdot d \cdot e + b + \overline{a} \cdot \overline{d} \cdot \overline{e}$

$= a \cdot d \cdot e + b + \overline{a} \cdot \overline{d} \cdot \overline{e}$

$= a \cdot d \cdot e + \overline{a} \cdot \overline{d} \cdot \overline{e} + b = 1 + b = 1$ ③ 에 의함

예2 - 5) $B + \overline{D} + E + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$

$= B + \overline{D} + E + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$

$= (B + \overline{B}) + \overline{D} + \overline{C} + E$

$= 1 + \overline{D} + \overline{C} + E = 1$ ③ 에 의함